# Über transzendente Progressionen oder deren allgemeine Terme algebraisch nicht gegeben werden können *

Leonhard Euler

**§1** Als ich neulich bei der Gelegenheit derer, die der hochgeehrte Goldbach über Reihen der Sozietät mitgeteilt hat, nach einem gewissen allgemeinen Ausdruck suchte, der alle Terme dieser Progression

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+\text{ etc}$$

gäbe, bin ich bedenkend, dass sie ins Unendliche fortgesetzt schließlich mit einer geometrischen vermischt wird, auf den folgenden Ausdruck gestoßen

$$\frac{1\cdot 2^n}{1+n}\cdot\frac{2^{1-n}\cdot 3^n}{2+n}\cdot\frac{3^{1-n}\cdot 4^n}{3+n}\cdot\frac{4^{1-n}\cdot 5^n}{4+n}\cdot\text{etc}$$

welche den Term der Ordnung $n$ besagter Progression erklärt. Er bricht freilich in keinem Fall ab, weder wenn $n$ eine ganze Zahl noch wenn es eine gebrochene ist, sondern, um jeden Term zu finden, verschafft er nur Approximationen, wenn nicht die Fälle $n=0$ und $n=1$ ausgenommen

*Originaltitel: "De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5* 1768, pp. 36-57", erneut gedruckt in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5* ed. nova,Bononiae 1744, pp. 28-47 [E19a]", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 1 - 24", Eneström-Nummer E19, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

werden, in denen er tatsächlich in 1 übergeht. Es werde $n = 2$ festgelegt; man wird haben

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 3}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6} = \text{ dem zweiten Term } 2$$

Wenn $n = 3$ ist, wird man haben

$$\frac{2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 1\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 6}\cdot\frac{5\cdot 5\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 4}\cdot \text{etc} = \text{dem dritten Term } 6$$

**§2** Obwohl aber dieser Ausdruck beim Finden der Terme keinen Nutzen zu haben scheinen mag, kann er dennoch für die Interpolation der Reihe oder für die Terme, deren Indizes gebrochene Zahlen sind, hervorragend verwendet werden. Über dies aber hier etwas zu erklären, habe ich nicht beschlossen, weil unten geeignetere Arten auftauchen, um dasselbe zu machen. Ich möchte das über diesen allgemeinen Term nur anführen, damit es auf die Dinge, die folgen, quasi führt. Ich habe den Term gesucht, dessen Index $n = \frac{1}{2}$ ist und der zwischen ersten, 1, und den vorhergehen fällt, der ebenso 1 ist. Nachdem aber $n = \frac{1}{2}$ gesetzt worden ist, habe ich diese Reihe erhalten

$$\sqrt{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdot \text{etc}}$$

die den gesuchten Term ausdrückt. Aber diese Reihe schien mir sofort gleich der zu sein, welche ich mich erinnerte in den Werken von Wallis für die Fläche des Kreises gesehen zu haben. Es hat nämlich Wallis gefunden, dass der Kreis zum Quadrat des Durchmessers ist wie

$$2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot \text{etc} \;\text{ zu } 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot \text{etc}$$

Wenn also der Durchmesser $= 1$ ist, wird die Fläche des Kreises sein

$$= \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot \text{etc}$$

Aus Übereinstimmung dieser mit meiner lässt sich also schließen, dass der Term des Index' $\frac{1}{2}$ gleich der Quadratwurzel aus dem Kreis ist, dessen Duchmesser $= 1$ ist.

**§3** Ich habe zuvor geglaubt, dass der allgemeine Term der Reihe $1, 2, 6, 24$, etc, wenn nicht algebraisch, dennoch exponential gegeben werden kann. Aber nachdem ich verstanden hatte, dass gewisse Zwischenterme von der Quadratur des Kreises abhängen, habe ich erkannt, dass weder algebraische noch exponentiale Größen, um ihn asuzudrücken, geeignet sind. Denn der allgemeine Term der Progression muss so beschaffen sein, dass er sowohl algebraische als auch von der Quadratur des Kreises und auch unter Umständen von anderen Quadraturen abhängende Größen erfasst; was keiner weder algebraischen noch exponentialen Formel zukommt.

**§4** Nachdem ich aber daran gedacht hatte, dass unter Differential größen Formeln solcher Art gegeben sind, die in gewissen Fällen eine Integration zulassen und dann algebraische Größen liefern, in anderen hingegen keine zulassen und dann von Quadraturen von Kurven abhängende Größen darbieten, kam es mir in den Sinn, dass unter Umständen Formeln dieser Art, um die allgemeinen Terme der erwähnten Progression und anderer ihr ähnlicher zu verschaffen, geeignet sind. Aber Progression, die solche allgemeinen Terme erfordern, die algebraisch nicht gegeben werden können, bezeichne ich als transzendent; so wie die Geometer all das, was die Kräfte gemeinen Algebra übersteigt, transzendent zu nennen pflegen.

**§5** Ich habe also darüber nachgesonnen, wie Differentialformeln, um allgemeine Terme von Progressionen auszudrücken, am besten verwendet werden sollten. Der allgemeine Term ist aber eine Formel, in welche sowohl konstante Größen als auch eine andere gewisse nicht konstante wie $n$ eingehen, welche die Ordnung der Terme oder den Index erklärt, dass, wenn der dritte Term verlangt wird, es nötig ist, anstelle von $n$ 3 zu setzen. Aber es muss in der Differentialformel eine gewisse variable Größe enthalten sein. Für diese ist es nicht ratsam, $n$ zu verwenden, weil sich seine Variabilität nicht auf die Integration bezieht, sondern, nachdem die Integralformel integriert worden war oder sie festgelegt wird integriert worden zu sein, erst dann zum Bilden der Progression dient. Es ist also von Nöten, dass in der Differentialformel eine gewisse variable Größ$x$ enthalten ist, die aber nach der Integration einer anderen sich auf die Integration beziehenden gleichzusetzen ist, deren Index $n$ ist.

**§6** Damit diese Dinge besser aufgefasst werden, sage ich, dass $\int pdx$ der allgemeine Term der auf die folgende Weise aus ihm zu findenden Progression ist; es bezeichne aber $p$ irgendeine Funktion von $x$ und Konstanten, in deren Anzahl man $n$ noch haben muss. Es werde $pdx$ integriert und um eine solche Konstante vermehrt aufgefasst, dass für $x = 0$ gesetzt das ganze Integral verschwindet; dann werde $x$ einer gewissen bekannten Größe gleich gesetzt. Danach werden im gefundenen Integral nur sich auf die Progression beziehende Größen übrig sein, und das wird den Term ausdrücken, dessen Index $= n$ ist. Oder das auf besagte Weise bestimmte Integral wird ausschließlich der allgemeine Term sein. Wenn man das freilich haben kann, ist keine Differentialformel von Nöten, sondern die daher gebildete Funktion wird einen algebraischen allgemeinen Term haben; anders verhält sich die Sache, wenn die Integration nur gelingt, nachdem gewisse Zahlen anstelle von $n$ eingesetzt worden sind.

**§7** Ich habe also mehrere keine Integration zulassende Differentialformeln dieser Art, außer wenn anstelle von $n$ eine ganze positive Zahl gesetzt wird, angenommen, damit die wesentlichen Terme algebraisch werden, und habe daher Progressionen gebildet. Deren allgemeine Terme werden deshalb griffbereit sein, und von welcher gewissen Quadratur ihre Zwischenterme abhängen, wird sich bestimmen lassen. Hier möchte ich freilich nicht mehrere Formeln solcher Art durchgehen, sondern werde nur eine einzige ein wenig allgemeinere behandeln, die sich sehr weit erstreckt und an alle Progressionen, deren beliebige Terme aus einer vom Index abhängenden Anzahl an Faktoren bestehende Produkte sind, angepasst werden kann; die Faktoren sind Brüche, deren Zähler und Nenner in irgendeiner arithmetischen Progression fortschreiten, wie

$$\frac{2}{3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{ etc}$$

**§8** Es sei diese Formel vorgelegt

$$\int x^e dx(1-x)^n$$

die den Platz des allgemeinen Terms einnimmt und die so integriert, dass sie $= 0$ wird, wenn $x = 0$ ist, und dann für $x = 1$ gesetzt den Term n-ter Ordnung der daher entspringenden Progression gebe. Wir wollen also sehen, was für eine Progression sie verschafft. Es ist

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{ etc}$$

und deshalb

$$dx(1-x)^n = x^e dx - \frac{n}{1}x^{e+1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{e+2}dx - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{e+3}dx + \text{ etc}$$

Daher ist

$$\int x^e dx(1-x)^n = \frac{x^{e+1}}{e+1} - \frac{nx^{e+2}}{1\cdot(e+2)} + \frac{n(n-1)x^{e+3}}{1\cdot 2\cdot(e+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{e+4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(e+4)} + \text{ etc}$$

Es werde $x = 1$ gesetzt, weil die Addition einer Konstante nicht von Nöten ist, und man wird

$$\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1\cdot(e+2)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot(e+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(e+4)} + \text{ etc}$$

als allgemeinen Term der zu findenden Reihe haben. Diese wird eine solche sein, dass, wenn $n = 0$ ist, der Term $= \frac{1}{e+1}$ hervorgeht; wenn $n = 1$ ist, der Term $= \frac{1}{(e+1)(e+2)}$; wenn $n = 2$ ist, der $= \frac{1\cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)}$; wenn $n = 3$, dass der Term $= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$ ist; das Gesetz, nach welchem diese Terme fortschreiten, ist offenbar.

**§9** Ich habe also diese Progression erhalten

$$\frac{1}{(e+1)(e+2)} + \frac{1\cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)} + \text{ etc}$$

deren allgemeiner Term ist

$$\int x^e dx(1-x)^n$$

Der Term n-ter Ordnung selbiger wird aber diese Form sein

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)}$$

Diese Form genügt freilich, um die Terme ganzzahliger Indizes zu finden, aber wenn die Indizes nicht ganzzahlig waren, können aus ihr die Terme selbst nicht gefunden werden. Um diese aber nähreungsweise zu finden, dient diese Reihe

$$\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1 \cdot (e+2)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (e+4)} + \text{ etc}$$

Wenn $\int x^e dx (1-x)^n$ mit $e+n+1$ multipliziert wird, wird man eine Progression haben, deren Term n-ter Ordnung dieser Form hat

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n)}$$

deren wahrer allgemeiner Term also sein wird

$$(e+n+1)\int x^e dx (1-x)^n$$

Hier ist zu bemerken, dass die Progression immer algebraisch wird, wann immer anstelle von $e$ eine positive Zahl angenommen wird. Es werde eines Beispiels wegen $e = 2$ gesetzt; der n-te Term der Progression wird sein

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)} \text{ oder } \frac{1 \cdot 2}{(n+1)(n+2)}$$

Dies zeigt auch der allgemeine Term selbst auf, der sein wird

$$(n+3)\int xxdx(1-x)^n$$

Denn sein Integral ist

$$\left(C - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{2(1-x)^{n+2}}{n+2} - \frac{(1-x)^{n+3}}{n+3}\right)(n+3)$$

damit diese $= 0$ wird, wenn $x = 0$ ist, wird sein

$$C = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n+3}$$

Es werde $x = 1$ gesetzt; der allgemeine Term wird sein

$$\frac{n+3}{n+1} - \frac{2(n+3)}{n+2} + 1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

**§10** Damit wir also transzendente Progressionen erhalten, werde $e$ gleich dem Bruch $\frac{f}{g}$ gesetzt. Es wird aber der Term n-ter Ordnung sein

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\cdots(f+ng)} g^n$$

oder

$$\frac{g \cdot 2g \cdot 3g \cdots ng}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\cdots(f+ng)}$$

Der allgemeine Term wird aber sein

$$= \frac{f+(n+1)g}{g} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$$

Wenn dieser durch $g^n$ geteilt wird, wird er für diese Progression sein

$$\frac{1}{f+g} + \frac{1 \cdot 2}{(f+g)(f+2g)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)} + \text{ etc}$$

deren Term n-ter Ordnung ist

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}$$

Der allgemeine Term der Progression wird also sein

$$= \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$$

Wenn dort der Bruch $\frac{f}{g}$ nicht einer ganzen Zahl gleich ist, oder wenn $f$ zu $g$ kein vielfaches Verhähltnis hat, wird die Progression transzendent sein und die Zwischenterme von Quadraturen abhängen.

**§11** Ich möchte hier ein bestimmtes Beispiel anführen, damit der Gebrauch des allgemeinen Terms besser vor Augen gefhrt wird. Es sei in der ersten Progression des vorhergehenden Paragraphen $f = 1, g = 2$; es wird der Term der Ordnung $n$ sein

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+1)}$$

die Progression selbst hingegen diese

$$\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \text{ etc}$$

deren allgemeiner Term also sein wird

$$\frac{2n+3}{2}\int dx(1-x)^n\sqrt{x}$$

Es werde der Term gesucht, dessen Index $\frac{1}{2}$ ist; es wird also $n=\frac{1}{2}$ werden und man wird den gesuchten Term haben

$$=2\int dx\sqrt{x-xx}$$

Weil dies das Element der Kreisfläche bedeutet, ist es offenkundig, dass der gesuchte Term die Fläche des Kreises ist, dessen Durchmesser $=1$ ist.
Es sei weiter diese Reihe vorgelegt

$$1+\frac{r}{1}+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ etc}$$

welches die der Koeffizienten des zur Potenz $r$ erhobenen Binoms ist. Der Term n-ter Ordnung ist also

$$\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}$$

Im vorhergehenden Paragraphen hatte man diesen

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}$$

Dieser, damit er mit jenem verglichen wird, ist zu invertieren, dass man hat

$$\frac{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}{1\cdot 2\cdots n}$$

dieser werde mit $\frac{n}{f+ng}$ multipliziert und es wird sein

$$=\frac{(f+g)(f+2g)\cdots(f+(n-1)g)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

es ist also nötig, dass $f+g=r$ und $f+2g=r-1$ ist, woher $g=-1$ und $f=r+1$ werden wird. Auf dieselbe Weise werde der nachstehende allgemeine Term behandelt

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n$$

Es wird für die vorgelegte Progression

$$1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2} + \text{ etc}$$

dieser allgemeine Term hervorgehen

$$\frac{n(-1)^{n+1}}{(r-n)(r-n+1)\int x^{-r-1}dx(1-x)^n}$$

Es sei $r = 2$; es wird der allgemeine Term dieser Progression

$$1, 2, 1, 0, 0, 0, \text{etc}$$

$$\frac{n(-1)^{n+1}}{(2-n)(3-n)\int x^{-3}dx(1-x)^n}$$

Hier muss aber bemerkt werden, dass dieser Fall und andere, in denen $e+1$ eine negative Zahl wird, nicht aus dem allgemeinen abgeleitet werden können, weil dann das Integral nicht $= 0$ wird, wenn $x = 0$ ist. Für diese ist es hingegen gefällig, dass

$$\int x^e dx(1-x)^n$$

auf eigene Weise integriert wird; nach der Integration ist nämlich eine unendliche Konstante hinzuzufügen. Wann immer aber $e+1$ eine positive Zahl ist, wie ich in §8 festgelegt habe, ist die Addition einer Konstante nicht von Nöten. Nachdem aber die Progression betrachtet worden ist, deren Term der Ordnung $n$ der folgende war

$$\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}$$

kann jene Form des Exponenten $n$ in diese verwandelt werden

$$\frac{r(r-1)\cdots 1}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1))(1\cdot 2\cdots(r-n+1))}$$

Aber durch §14 ist

$$r(r-1)\cdots 1 = \int dx(-\ln(x))^r$$

und

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1) = \int dx(-\ln(x))^{n-1}$$

und

$$1 \cdot 2 \cdots (r-n+1) = \int dx(-\ln(x))^{r-n+1}$$

Deswegen hat man von der dort behandelten Progression

$$1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ etc}$$

hier den allgemeinen Term

$$\frac{\int dx(-\ln(x))^r}{\int dx(-\ln(x))^{n-1} \int dx(-\ln(x))^{r-n+1}}$$

Wenn $r = 2$ war, wird der allgemeine Term sein

$$\frac{2}{\int dx(-\ln(x))^{n-1} \int dx(-\ln(x))^{3-n}}$$

welchem diese Progression entspricht

$$1, 2, 1, 0, 0, 0, \text{ etc}$$

wie wenn der Term des Index' $\frac{3}{2}$ gesucht, wird er sein

$$\frac{2}{\int dx(-\ln(x))^{\frac{1}{2}} \int dx(-\ln(x))^{\frac{3}{2}}}$$

Nachdem also die Fläche des Kreises, dessen Durchmesser $= 1$ ist, $A$ genannt worden ist, weil ist

$$\int dx(-\ln(x))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A} \text{ und } \int dx(-\ln(x))^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{A}$$

wird der in die Mitte zwischen die zwei ersten Terme der Progression $1, 2, 1, 0, 0, 0,$ etc fallende Term von dieser Form $\frac{4}{3A}$ sein, das heißt sehr nahe $\frac{5}{3}$.

**§12** Ich schreite nun zur Progression voran, über die ich eingangs geredet habe,

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \text{ etc}$$

und in welcher der Term der Ordnung $n$ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$ ist. Diese Progression ist in unserer allgemeinen enthalten, aber der allgemeine Term muss auf eigene

Weise daher abgeleitet werden. Bisher habe ich natürlich den allgemeinen Term gehabt, wenn der Term der Ordnung $n$ ist

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}$$

der, wenn $f = 1$ und $g = 0$ gesetzt wird, in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ übergeht, deren allgemeiner Term gesucht wird; es werden also im allgemeinen Term

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$$

diese Werte anstelle von $f$ und $g$ eingesetzt; es wird der gesucht allgemeine Term sein

$$\int \frac{x^{\frac{1}{0}} dx (1-x)^n}{0^{n+1}}$$

Was aber der Wert dieses Ausdrucks ist, untersuche ich auf die folgende Weise.

**§13** Aus der Bedingung, nach welcher die allgemeinen Terme dem Nutzen entsprechend gestaltet werden müssen, wird eingesehen, dass anstelle von $x$ andere Funktionen von $x$ eingesetzt werden können, solange sie solche waren, dass sie $= 0$ sind, wenn $x = 0$ ist, und $= 1$, wenn $x = 1$ ist. Denn wenn Funktionen von dieser Art anstelle von $x$ eingesetzt werden, wird der allgemeine Term genauso Genüge leisten wie zuvor. Es werde also $x^{\frac{g}{f+g}}$ anstelle von x gesetzt und als logische Konsequenz $\frac{g}{f+g} x^{\frac{-f}{g+f}} dx$ anstelle von $dx$, wonach man haben wird

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int \frac{g}{f+g} dx (1 - x^{\frac{g}{f+g}})^n$$

Nun werde hier $f = 1$ und $g = 0$ gesetzt; man wird haben

$$\int \frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$$

Weil aber $x^0 = 1$ ist, haben wir einen Fall, in dem Zähler und Nenner verschwinden, $(1-x^0)^n$ und $0^n$. Durch die bekannte Regel wollen wir also den Wert des Bruches $\frac{1-x^0}{0}$ suchen. Dies wird gemacht werden, indem der Wert des Bruches $\dfrac{1-x^z}{z}$ dann gesucht wird, wenn $z$ verschwindet; es werden also sowohl Zähler als auch der Nenner differenziert, nachdem allein $z$ als Variable festgelegt worden ist; man wird $\frac{-x^z dx \ln(z)}{dz}$ oder $-x^z \ln(x)$ haben; wenn nun $z = 0$ gesetzt wird, wird $-\ln(x)$ hervorgehen. Es ist deshalb

$$\frac{1-x^0}{0} = -\ln(x)$$

**§14** Weil also ist

$$\frac{1-x^0}{0} = -\ln(x)$$

wird sein

$$\frac{(1-x^0)^n}{0^n} = (-\ln(x))^n$$

und deshalb ist der gesuchte allgemeine Term $\int \frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$ in $\int dx(-\ln(x))^n$ verwandelt worden. Dessen Wert kann durch Quadraturen gefunden werden. Deswegen ist der allgemeine Term dieser Progression

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, \text{etc}$$

dieser

$$\int dx(-\ln(x))^n$$

auf dieselbe Weise zu verwendende, die oben vorgeschrieben worden ist. Dass aber dieser der allgemeine Term der vorgelegten Progression ist, wird auch daher erkannt, dass er die Terme, deren Indizes ganze positive Zahlen sind, in der Tat liefert. Es sei eines Beispiels wegen $n = 3$; es wird sein

$$\int dx(-\ln(x))^3 = \int -dx(\ln(x))^3 = -x(\ln(x))^3 + 3x(\ln(x))^2 - 6x\ln(x) + 6x$$

die Addition einer Konstante ist nicht von Nöten, weil für $x = 0$ gesetzt alles verschwindet; es werde also $x = 1$ gesetzt; weil $\ln(1) = 0$ ist, werden alle mit Logarithmen behafteten Terme verschwinden und es wird 6 zuückbleiben, welches der dritte Term ist.

**§15** Es ist freilich klar, dass diese Methode, die Terme dieser Reihe zu finden, zu aufwendig ist, natürlich die Terme, deren Indizes ganze Zahlen sind, die selbstredend leichter durch Fortsetzten der Progression erhalten werden. Aber dennoch ist sie, um die Terme der gebrochener Indizes zu finden, überaus geeignet, die natürlich bis jetzt nicht einmal mit der aufwendigsten Methode bestimmt werden können. Wenn $x = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, wird man den entsprechenden Term $= \int dx \sqrt{-\ln(x)}$ haben, dessen Wert durch Quadraturen gegeben ist. Aber am Anfang [§11] habe ich gezeigt, dass dieser Term gleich der Quadratwurzel aus dem Kreis ist, dessen Durchmesser 1 ist. Es ist freilich wegen des Mangels der Analysis nicht möglich, daher dasselbe zu folgern; unten wird aber eine Methode folgen, dieselben Zwischenterme auf die Quadraturen von algebraischen Kurven zurückzuführen. Aus deren Vergleich mit dieser wird unter Umständen einiges zur Erweiterung der Analysis abgeleitet werden können.

**§16** Der allgemeine Term der Progression, deren Term der Ordnung $n$ durch diesen Ausdruck angegeben wird

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\cdots(f+ng)}$$

ist durch §10

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$$

Wenn aber der Term der Ordnung $n$ war

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

dann ist der allgemeine Term

$$\int dx (-\ln(x))^n$$

Wenn diese Formel anstelle von $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ eingesetzt wird, wird man haben

$$\frac{\int dx(-\ln(x))^n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\cdots(f+ng)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$$

Daher wird bewirkt

$$(f+g)(f+2g)(f+3g)\cdots(f+ng) = \frac{g^{n+1} \int dx(-\ln(x))^n}{(f+(n+1)g) \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n}$$

Dieser Ausdruck ist also der allgemeine Term dieser Progression

$$(f+g), (f+g)(f+2g), (f+g)(f+2g)(f+3g) \text{ etc}$$

Mit Hilfe des allgemeinen Terms werden also alle Terme irgendeines Index' von allen Progressionen dieser Art bestimmt. Die Dinge, die unten über die Reduktion von $\int dx(-\ln(x))^n$ auf bekanntere Quadraturen von algebraischen Kurven folgen werden, werden auch hier Nutzen haben.

**§17** Es sei $f+g=1$ und $f+2g=3$; es wird $g=2$ und $f=-1$ sein. Daher wird diese spezielle Progression entspringen

$$1, 1\cdot 3, 1\cdot 3\cdot 5, 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \text{ etc}$$

Deren allgemeiner Term ist also

$$\frac{2^{n+1}\int dx(-\ln(x))^n}{(2n+1)\int x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^n}$$

Obwohl hier der Exponent von $x$ negativ ist, hat dennoch dieser Umstand, über den oben redet worden ist, hier keine Geltung, weil er kleiner als die Einheit ist. Es werde $n=\frac{1}{2}$ gesetzt, dass der Term der Ordnung $\frac{1}{2}$ gefunden wird; er wird sein

$$=\frac{2^{\frac{3}{2}}\int dx\sqrt{-\ln(x)}}{2\int x^{-\frac{1}{2}}dx\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{2}\int dx\sqrt{-\ln(x)}}{\int\frac{dx-xdx}{\sqrt{x-xx}}}$$

Durch §15 ist aber bekannt, dass $\int dx\sqrt{-\ln(x)}$ die Quadratwurzel aus dem Kreis gibt, dessen Durchmesser $=1$; es sei die Peripherie seines Kreises $p$; es wird die Fläche $=\frac{1}{4}p$ sein und daher gibt $\int dx\sqrt{-\ln(x)}$ $\frac{1}{2}\sqrt{p}$. Des Weiteren ist

$$\int\frac{dx-xdx}{2\sqrt{x-xx}}=\int\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}+\sqrt{x-xx}$$

aber $\int\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$ gibt den Bogen des Kreises, dessen Sinus versus $x$ ist. Nachdem deshalb $x=1$ gesetzt worden ist, wird $\frac{1}{2}p$ hervorgehen. Deswegen wird der gesuchte Term sein

$$=\sqrt{\frac{2}{p}}$$

**§18** Weil der allgemeine Term der Progression, dessen Term der Ordnung $n$ angezeigt wird durch

$$(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)$$

durch §16 ist

$$\frac{g^{n+1}\int dx(-\ln(x))^n}{(f+(n+1)g)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n}$$

gleichermaßen, wenn der Term der Ordnung $n$ war

$$(h+k)(h+2k)\cdots(h+nk)$$

wird der allgemeine Term

$$\frac{k^{n+1}\int dx(-\ln(x))^n}{(h+(n+1)k)\int x^{\frac{h}{k}}dx(1-x)^n}$$

Es werde jene Progression durch diese geteilt, natürlich der erste Term durch den ersten, der zweite durch der zweiten und so weiter; es wird zu einer neuen Progression gelangt werden, deren Term der Ordnung $n$ sein wird

$$\frac{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}{(h+k)(h+2k)\cdots(h+nk)}$$

Und der aus jenen zwei zusammengesetzte allgemeine Term dieser Progression wird sein

$$\frac{g^{n+1}(h+(n+1)k)\int x^{\frac{h}{k}}dx(1-x)^n}{k^{n+1}(f+(n+1)g)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n}$$

Dieser ist frei vom logarithmischen Integral $\int dx(-\ln(x))^n$

**§19** Bei allen allgemeinen Termen dieser Art ist besonders dies anzumerken, dass anstelle von $f, g, h, k$ freilich keine konstanten Zahlen gesetzt werden müssen, sondern sie auch auf irgendeine Weise von $n$ abhängend angenommen werden können. Bei der Integration werden nämlich die Buchstaben genauso wie $n$ betrachtet, alle als Konstanten. Es sei der Term der Ordnung $n$ dieser

$$(f+g)(f+2g)\cdots(g+ng)$$

es werde $g=1$ gesetzt, aber $f=\frac{nn-n}{2}$. Weil die Progression selbst ist

$$f+g.(f+g)(f+2g),(f+g)(f+2g)(f+3g) \text{ etc}$$

werde überall 1 anstelle von $g$ festgelegt; sie wird sein

$$f+1,(f+1)(f+2),(f+1)(f+2)(f+3) \text{ etc}$$

Aber anstelle von $f$ muss im ersten Term 0 geschrieben werden, im zweiten 1, im dritten 3, im vierten 6 und so weiter; es wird diese Progression hervorgehen

$$1, 1 \cdot 2, 4 \cdot 5 \cdot 6, 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \text{ etc}$$

deren allgemeiner Term ist

$$\frac{2\int dx(-\ln(x))^n}{(nn+n+2)\int x^{\frac{nn-n}{2}}dx(1-x)^n} = \frac{2\int dx(-\ln(x))^n}{(nn+n+2)\int dx(x^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n+1}{2}})^n}$$

**§20** Ich komme nun zu dieser Progressionen, woher ich jenen Vorteil beim Bestimmen der Zwischenterme dieser Progression

$$1, 2, 6, 24, 120 \text{ etc}$$

erhalten habe. Er erstreckt sich nämlich weiter als auf diese Progression allein, weil ja ihr allgemeiner Term

$$\int dx(-\ln(x))^n$$

auch in die allgemeinen Terme unendlich vieler anderer Progressionen eingeht. Ich nehme diesen allgemeinen Term an

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n$$

welchem dieser Term der Ordnung $n$ entspricht

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\cdots(f+ng)}$$

Ich setze hier $f = n$, $g = 1$; es wird der allgemeine Term sein

$$(2n+1)\int x^n dx(1-x)^n \text{ oder } (2n+1)\int dx(x-xx)^n$$

und seine Form der Ordnung $n$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\cdots 2n}$$

Die Progression selbst hingegen diese

$$\frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \text{ etc}$$

oder diese
$$\frac{1\cdot 1}{1\cdot 1}, \frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$
In dieser sind die Zähler die Quadrate der Progression $1, 2, 6, 24$ etc; zwischen zwei benachbarten Nennern wird hingegen der von beiden gleich weit entfernte leicht gefunden. Es sei in der Progression $1, 2, 6, 24$ etc der Term, dessen Index $\frac{1}{2}$ ist, $A$; es wird der Term der Ordnung $\frac{1}{2}$ jener Progression $= \dfrac{AA}{1}$ sein.

**§21** Es werde im allgemeinen Term
$$(2n+1)\int x^n dx (1-x)^n$$
$n = \frac{1}{2}$ gesetzt; es wird der Term, dieses Exponenten sein
$$2\int dx\sqrt{x-xx} = \frac{AA}{1}$$
woher
$$A = \sqrt{1\cdot 2\int dx\sqrt{x-xx}}$$
gleich dem Term der Progression $1, 2, 6, 24$ etc ist, dessen Index $\frac{1}{2}$ ist, der also, wie sich daraus zeigt, die Quadratwurzel aus dem Kreis des Durchmessers 1 ist. Es werde nun der Term dieser Progression der Ordnung $\frac{3}{2}$ $A$ genannt; es wird der entsprechende in der angenommenen Progression sein
$$\frac{A\cdot A}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\int dx(x-xx)^{\frac{3}{2}}$$
also
$$A = \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\int dx(x-xx)^{\frac{3}{2}}}$$
Auf die gleiche Weise wird der Term der Ordnung $\frac{5}{2}$ gefunden werden
$$= \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\int dx(x-xx)^{\frac{5}{2}}}$$
Aus diesen folgere ich allgemein, dass der Term der Ordnung $\frac{p}{2}$ sein wird
$$= \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(p+1)\int dx(x-xx)^{\frac{p}{2}}}$$
Auf diese Weise werden also alle Terme der Progression $1, 2, 6, 24$ etc gefunden, deren Indizes Brüche sind, während der Nenner 2 ist.

**§22** Weiter setze ich im allgemeinen Term

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n$$

$f=2n$, während $g=1$ bleibt; es wird

$$(3n+1)\int dx(xx-x^3)^n$$

als allgemeiner Term dieser Progression hervorgehen

$$\frac{1}{3},\frac{1\cdot 2}{5\cdot 6},\frac{1\cdot 2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 9}\text{ etc}$$

Es werde jener mit dem vorhergehenden $(2n+1)\int dx(x-xx)^n$ multipliziert; es wird hervorgehen

$$(2n+1)(3n+1)\int dx(x-xx)^n\int dx(xx-x^3)^n$$

Dieser wird diese Progression geben

$$\frac{1\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3},\frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\text{ etc}$$

wo die Zähler die Kuben der Progression $1,2,6,24$ etc sind. Der Term der Ordnung $\frac{1}{3}$ dieser Progression sei $A$; es wird der entsprechende jener sein

$$\frac{A^3}{1}=2\left(\frac{2}{3}+1\right)\int dx(x-xx)^{\frac{1}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{1}{3}}$$

also ist der Term der Ordnung $\frac{1}{3}$

$$\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot\frac{5}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{1}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{1}{3}}}$$

gleichermaßen ist der Term der Ordnung $\frac{2}{3}$

$$\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{7}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{2}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

Und der Term der Ordnung $\frac{4}{3}$ ist

$$\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{11}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{4}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{4}{3}}}$$

und allgemein ist der Term der Ordnung $\frac{p}{3}$

$$\sqrt[3]{1\cdot 2\cdots p\cdot\frac{2p+3}{3}\cdot(p+1)\int dx(x-xx)^{\frac{p}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{3}}}$$

**§23** Wenn wir, indem $f = 3n$ gesetzt wird, weiter fortschreiten wollen, wird der allgemeine Term

$$(4n+1)\int dx(x^3-x^4)^n$$

mit den vorhergehenden multipliziert werden müssen, woher man hat

$$(2n+1)(3n+1)(4n+1)\int dx(x-xx)^n\int dx(x^2-x^3)^n$$

welcher für diese Reihe ist

$$\frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\text{ etc}$$

Aus dieser werden die Terme der Progression $1, 2, 6, 24$ etc bestimmt werden, deren Indizes die Brüche sind, die den Nenner 4 haben. Natürlich wird der Term, dessen Index $\frac{p}{4}$ ist, gefunden werden

$$\sqrt[4]{1\cdot 2\cdot 3\cdots p\left(\frac{2p}{4}+1\right)\left(\frac{3p}{4}+1\right)(p+1)}$$

$$\times\int dx(x-xx)^{\frac{p}{4}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{4}}\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{4}}$$

Daher lässt sich allgemein folgern, dass der Term der Ordnung $\frac{p}{q}$ ist

$$=\sqrt[q]{1\cdot 2\cdot 3\cdots p\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\cdots(p+1)}$$

$$\times\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}\cdots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}$$

Aus dieser Formel werden also die Terme irgendeines gebrochenen Index' durch Quadraturen algebraischer Kurven gefunden; dafür wird aber $1\cdot 2\cdot 3\cdots p$ verlangt, der Term, dessen Index der Zähler des vorgelegten Bruches ist.

**§24** Auf dieselbe Weise lässt sich weiter zu noch mehr zusammengesetzten Progressionen fortschreiten, indem noch mehr zusammengesetzte allgemeine Terme angenommen werden, aber ich verfolge diese Dinge nicht weiter. Es können auch die Integralzeichen multipliziert werden, dass der allgemeine Term ist

$$\int qdx\int pdx$$

es muss natürlich das Integral von $pdx$ mit $qdx$ multipliziert werden und was resultiert muss erneut integriert werden, was erst für $x = 1$ gesetzt einen Term der Reihe geben wird. Bei jeder der beiden Integrationen, damit sie bestimmt ist, ist es aber nötig, durch Addieren einer Konstante zu bewirken, dass für $x = 0$ das Integral ebenso $= 0$ wird.
Auf die gleiche Weise sind allgemeine Terme zu behandeln, die in mehreren Integralzeichen enthalten sind, wie

$$\int rdx \int qdx \int pdx$$

Aber dennoch sind immer anstelle von $p, q, r$ etc solche Funktion zu nehmen, dass, sooft $n$ eine ganze positive Zahl ist, zumindest algebraische Terme hervorgehen.

**§25** Es sei der allgemeine Term

$$\int \frac{dx}{x} \int x^e dx (1-x)^n$$

dieser gibt in eine Reihe umgewandelt

$$\frac{x^{e+1}}{(e+1)^2} - \frac{nx^{e+2}}{1 \cdot (e+2)^2} + \frac{n(n-1)x^{e+3}}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)^2} - \text{ etc}$$

Für $x = 1$ gesetzt wird man den Term der Ordnung $n$ durch diese Reihen haben

$$\frac{1}{(e+1)^2} - \frac{n}{1 \cdot (e+2)^2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)^2} - \text{ etc}$$

Die Progression selbst hingegen wird diese vom Term, dessen Index 0 ist, aus beginnende sein

$$\frac{1}{(e+1)^2}, \frac{(e+2)^2 - (e+1)^2}{(e+2)^2(e+1)^2}, \frac{(e+3)^2(e+2)^2 - 2(e+3)^2(e+1)^2 + (e+2)^2(e+1)^2}{(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$$

$$\frac{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2 - 3(e+4)^2(e+3)^2(e+1)^2}{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$$

$$+ \frac{3(e+4)^2(e+2)^2(e+1)^2 - (e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$$

etc

Das Bildungsgesetz dieser Progression ist offenbar und bedarf keiner weiteren Erklärung. Es sei $e = 0$; es wird sein

$$\int dx(1-x)^n = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$$

der allgemeine Term ist also

$$\int \frac{dx - dx(1-x)^{n+1}}{(n+1)x}$$

die Progression hingegen wird diese sein

$$\frac{1}{1}, \frac{4-1}{4\cdot 1}, \frac{9\cdot 4 - 2\cdot 9\cdot 1 + 4\cdot 1}{9\cdot 4\cdot 1}, \frac{16\cdot 9\cdot 4 - 3\cdot 16\cdot 9\cdot 1 + 3\cdot 16\cdot 4\cdot 1 - 9\cdot 4\cdot 1}{16\cdot 9\cdot 4\cdot 1}.$$

Die Differenzen von dieser werden diese Progression festlegen

$$\frac{-1}{4\cdot 1}, \frac{-9+4}{9\cdot 4\cdot 1}, \frac{-16\cdot 9 + 2\cdot 16\cdot 4 - 9\cdot 4}{16\cdot 9\cdot 4\cdot 1} \text{ etc}$$

**§26** In dieser Abhandlung habe ich also das, was ich besonders beabsichtigte, erreicht, natürlich dass ich die allgemeinen Terme aller Progressionen fände, deren einzelne Terme Produkte aus in einer arithmetischen Progression fortschreitenden Faktoren sind, in denen die Anzahl der Faktoren wie es beliebt von den Indizes der Faktoren abhängt. Obwohl aber hier immer die Anzahl der Faktoren dem Index gleich gesetzt worden ist, hat dennoch, wenn er auf eine andere Weise davon abhängend verlangt wird, die Sache nichts an Schwierigkeit. Der Index ist mit dem Buchstaben $n$ bezeichnet worden; wenn nun jemand verlangt, dass die Anzahl der Faktoren $\frac{nn+n}{2}$ ist, ist keine andere Operation von Nöten, außer dass überall anstelle von $n$ $\frac{nn+n}{2}$ eingesetzt wird.

**§27** Anstelle des Schlußschnörkels möchte ich noch etwas, es ist freilich eher interessant als nützlich, anfügen. Es ist bekannt, dass durch $d^n x$ das Differential der Ordnung $n$ von $x$ verstanden wird und $d^n p$, wenn $p$ eine gewisse Funktion von $x$ bezeichnet und $dx$ konstant gesetzt wird, mit $dx^n$ homogen ist; immer aber, wann $n$ eine ganze positive Zahl ist, kann das Verhältnis, dass $d^n p$ zu $dx^n$ hat, algebraisch ausgedrückt werden; wie wenn $n = 2$ und $p = x^3$ ist, wird $d^2(x^3)$ zu $dx^2$ wie $6x$ zu 1 sein. Es wird also nun gesucht, wenn $n$ eine gebrochene Zahl ist, was dann für ein Verhältnis bestehen wird. Die Schwierigkeit in diesen Fällen wird leicht verstanden;

denn wenn $n$ eine ganze positive Zahl ist, wird $d^n$ durch Wiederholen der Differenziation gefunden; ein solcher Weg steht aber nicht offen, wenn $n$ eine gebrochene Zahl ist. Aber dennoch wird sich mit Hilfe der Interpolationen der Progressionen, über welche ich in dieser Abhandlung erklärt habe, die Sache erledigen lassen.

**§28** Es sei das Verhältnis zwischen $d^n(z^e)$ und $dz^n$ für konstant festgelegtes $dz$ zu finden, oder es wird der Wert des Bruches $\frac{d^n(z^e)}{dz^n}$ verlangt. Wir wollen also zuerst sehen, welches seine Werte sind, wenn $n$ eine ganze Zahl ist, dass danach allgemein die Anwendung geschehen kann. Wenn $n = 1$ ist, wird sein Wert sein

$$ez^{e-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (e-1)} z^{e-1}$$

ich drücke $e$ auf diese Weise aus, damit später leichter das, was angegeben worden ist, hierauf übertragen wird. Wenn $n = 2$ ist, wird der Wert sein

$$e(e-1)z^{e-2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (e-2)} z^{e-2}$$

Wenn $n = 3$ ist, wird man haben

$$e(e-1)(e-2)z^{e-3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (e-3)} z^{e-3}$$

Daher bringe ich allgemein ein, was auch immer $n$ ist, dass immer sein wird

$$\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (e-n)} z^{e-n}$$

Es ist aber durch §14

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e = \int dx(-\ln(x))^e \text{ und } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (e-n) = \int dx(-\ln(x))^{e-n}$$

Daher hat man

$$\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n} \frac{\int dx(-\ln(x))^e}{\int dx(-\ln(x))^{e-n}}$$

oder

$$d^n(z^e) = z^{e-n} dz^n \frac{\int dx(-\ln(x))^e}{\int dx(-\ln(x))^{e-n}}$$

Es wird hier $dz$ konstant festgelegt und sowohl $\int dx(-\ln(x))^e$ als auch $\int dx(-\ln(x))^{e-n}$ müssen so integriert werden, wie oben vorgeschrieben worden ist, und dann ist es nötig $x = 1$ zu setzen.

**§29** Es ist nicht von Nöten, wie das Wahre gefunden wird, zu zeigen; es wird nämlich klar werden, indem anstelle von $n$ irgendeine ganze positive Zahl gesetzt wird. Es werde aber gesucht, was $d^{\frac{1}{2}}z$ ist, wenn $dz$ konstant ist. Es wird also $e = 1$ und $n = \frac{1}{2}$ sein. Man wird deshalb haben

$$d^{\frac{1}{2}}z = \frac{\int dx(-\ln(x))}{\int dx\sqrt{-\ln(x)}}\sqrt{zdz}$$

Es ist daher

$$\int dx(-\ln(x)) = 1$$

und nachdem die Fläche des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist, $A$ genannt worden ist, wird sein

$$\int dx\sqrt{-\ln(x)} = \sqrt{A}$$

woher ist

$$d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\frac{zdz}{A}}$$

Es sei also diese Gleichung für irgendeine Kurve vorgelegt

$$yd^{\frac{1}{2}}z = z\sqrt{dy}$$

wo $dz$ konstant festgelegt wird, und gesucht wird, was für eine Kurve sie ist. Weil $d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\frac{zdz}{A}}$ ist, wird die Gleichung in diese übergehen

$$y\sqrt{\frac{zdz}{A}} = z\sqrt{dz}$$

die quadriert gibt

$$\frac{yydz}{A} = zdy$$

daher wird gefunden

$$\frac{1}{A}\ln(z) = C - \frac{1}{y}$$

oder

$$y\ln(z) = cAy - A$$

welches die Gleichung für die gesuchte Kurve ist.